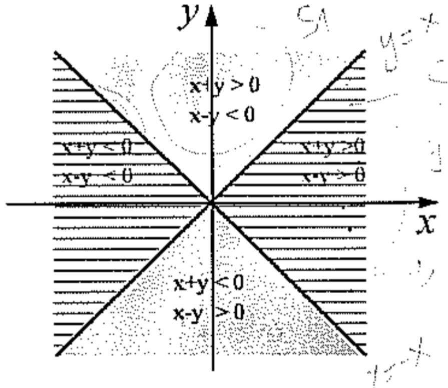
$$S_3 = \{(x,y) \; : \; x+y>0, \; x-y>0\}, \quad F(u,v) = u+1$$

$$S_4 = \{(x,y) \; : \; x+y>0, \; x-y>0\}, \quad F(u,v) = u+1$$



Şekil 4.16.

4.4. PROBLEMLER

4.4.1. $F(x,y) = x^2 + 3xy^2 + y^3 - 2 = 0$ denklemi ile kapalı olarak tanımlanan $y = f(x)$ fonksiyonunun dy/dx türevini bulunuz.

4.4.2. $F(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$ denkleminin $(1,0,1)$ noktası civarında kapalı olarak $z = f(x,y)$ fonksiyonunu tanımladığını gösteriniz ve z_x, z_y, z_{xx} ve z_{xy} kısmi türevlerini bulunuz.

4.4.3. $F(x,y,z) = xy^2z + xy - x + 2z = 0$ denklemi veriliyor. $(0,0,0)$ noktası civarında z nin x, y ye göre çözülebileceğini gösteriniz ve bu çözümü bulunuz. Böylece z_x ve z_y kısmî türevlerini doğrudan hesaplayarak bulunuz. Bulduğunuz türevleri kapalı olarak türev alma yöntemi ile doğrulayınız.

4.4.4. $u = f_1(x,y) = \left(x^4 + y^4\right)/x$ ve $v = f_2(x,y) = \sin x + \cos y$ denklemleri ile tanımlanan $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ dönüşümünün tanım kümesini belirtiniz. $\mathbf{f}(\pi/2, \pi/2) = (u_0, v_0)$ noktası civarında $\mathbf{f}$ nin tersi var mıdır? $\partial x/\partial u$, $\partial x/\partial v$, $\partial y/\partial u$ ve $\partial y/\partial v$ kısmi türevlerini hesaplayınız.

4.4.5.
$$\left.\begin{aligned} u &= f_1(x,y,z) = x + xyz \\ v &= f_2(x,y,z) = y + xy \\ w &= f_3(x,y,z) = z + 2x + 3z^2 \end{aligned}\right\}$$

denklem sisteminin $(0,0,0)$ ın bir civarında x, y ve z ye göre $(u, v, w$ cinsinden) çözülüp çözülemeyeceğini araştırınız.

4.4.6. $$\left.\begin{aligned} xu + yv^2 &= 0 \\ xv^3 + y^2v^6 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemi veriliyor. $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, 1, 0, 0)$ civarında u ve v değişkenleri x, y cinsinden çözülebilir mi?

4.4.7. $$\left.\begin{aligned} 3x + 2y + z^2 + u + v^2 &= 0 \\ 4x + 3y + z + u^2 + v + w + 2 &= 0 \\ x + y + w + u^2 + 2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemi $(x, y, z, u, v, w) = (0, 0, 0, 0, 0, -2)$ noktası civarında u, v, w ye göre (x, y, z cinsinden) çözülebilir mi?

4.4.8. $F(x, y, z) = e^{-xy} - 3z + e^z = 0$ denklemi ile kapalı olarak tanımlanan $z = f(x, y)$ fonksiyonunun kısmi türevlerini bulunuz.

4.4.9. $F(x, y, z) = 0$ denklemi, diferensiyellenebilir $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$ ve $x = h(y, z)$ fonksiyonlarını tanımlamış olsun.

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -1$$

olduğunu gösteriniz

4.4.10. $x = yf(z) + g(z)$ denkleminin, diferensiyellenebilir $z = h(x, y)$ fonksiyonunu tanımladığını farzedelim. $f(z)z_x + z_y = 0$ olduğunu gösteriniz.

4-2.11. $z = yg(\frac{z}{x})$ denklemini diferensiyellenebilir $z = f(x, y)$ fonksiyonunu tanımladığını farzedelim. $xz_x + yz_y = z$ olduğunu gösteriniz.

4.4.12. $u = f_1(x, y) = e^x \cos y$, $v = f_2(x, y) = e^x \sin y$ olsun. $(x, y) \to (u, v)$ dönüşümünün yerel olarak tersinin olduğunu fakat tanım cümlesinde tersinin olmadığını gösteriniz.

4.4.13. $x - az = g(y - bz)$ denklemi ile kapalı olarak verilen $z = f(x, y)$ fonksiyonu için

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

olduğunu gösteriniz.

4.4.14. $(x, y) \to \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \frac{xy}{x^2+y^2}\right)$ dönüşümünün $(0, 1)$ ın uygun bir civarında tersi var mıdır?

4.4.15. $f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ olsun. $f'(0) \neq 0$ olduğunu gösteriniz. f nin 0 ın civarında tersi yoktur. Bu husu, ters dönüşüm teoremine tezat mıdır?

4-4.16. $\left.\begin{aligned} u &= f_1(x,y) = 4x + 2y \\ v &= f_2(x,y) = -3x + y \end{aligned}\right\}$ olarak tanımlanan $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ vektör değerli fonksiyonunun tersini bulunuz. $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$ türevlerini hesaplayınız.

4.4.17. $\left.\begin{aligned} u &= f_1(x,y) = x^2 + y^2 \\ v &= f_2(x,y) = x^2 - y^2 \end{aligned}\right\}$ ile tanımlanan $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ fonksiyonunun yerel oarak tersinin olduğu bölgeyi belirtiniz. $\frac{\partial y}{\partial u}$ ve $\frac{\partial y}{\partial v}$ kısmi türevlerini hesaplayınız.

4.4.18. $\left.\begin{aligned} xy + x^2 u &= v y^2 \\ 3x - 4y &= x^2 v \end{aligned}\right\}$ olduğuna göre u_x ve v_x türevlerini hesaplayınız.

4.4.19. $\mathbf{f} = (f_1, f_2) : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to B \subseteq \mathbb{R}^2$ birebir ve üzerine olsun. Üstelik $\mathbf{f}(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) = (u,v)$ olmak üzere $\mathbf{f} \in C^1(A)$ ve $\mathbf{f}$ nin Jakobieni sıfırdan farklı yani $J_{\mathbf{f}} \neq 0$ olsun. Bu takdirde $\mathbf{f}$ nin Jakobieni ile $\mathbf{f}$ nin $\mathbf{f}^{-1}(u,v) = (g_1(u,v), g_2(u,v)) = (x,y)$ tersinin Jakobieni arasında

$$J_{\mathbf{f}}.J_{\mathbf{f}^{-1}} = \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)} \frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(u,v)} = 1$$

bağıntısının oldduğunu gösteriniz.

4.4.20.

$$u = \ln x - \ln y, \quad v = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

ise u ve v nin fonksiyonel bağımlı olup olmadığını araştırınız ve varsa aralarındaki bağıntıyı bulunuz.

4.4.21.

$$\begin{aligned} u &= x + y \\ v &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

ise u ve v nin fonksiyonel bağımlı olduğunu gösteriniz ve aralarındaki bağıntıyı bulunuz.

4.4.22. $u = f_1(x,y,z) = \sin(x + y - z)$, $v = f_2(x,y,z) = \cos(x + y - z)$ ise xyz-uzayında f_1 ve f_2 nin fonksiyonel bağımlı olduğunu gösteriniz. •